ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

PHẠM TRUNG HẢO

HIỆU CHỈNH BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN, 5/2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

PHẠM TRUNG HẢO

HIỆU CHỈNH BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN TRÊN TẬP ĐIỂM BẤT ĐỘNG CHUNG CỦA NỬA NHÓM KHÔNG GIÃN

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số: 8460112

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
PGS.TS. NGUYỄN THỊ THU THỦY

THÁI NGUYÊN, 5/2018

Mục lục

Bảng ký hiệu

H	không gian Hilbert thực
X	không gian Banach
X^*	không gian đối ngẫu của X
S_X	mặt cầu đơn vị của X
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\emptyset$	tập rỗng
$\forall x$	với mọi x
$\mathcal{D}(A)$	miền xác định của toán tử A
$\mathcal{R}(A)$	miền ảnh của toán tử A
A^{-1}	toán tử ngược của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$C[a,b]$	không gian các hàm liên tục trên đoạn $[a,b]$
$l^p,\ 1 \le p < \infty$	không gian các dãy số khả tổng bậc p
l_∞	không gian các dãy số bị chặn
$L^p[a,b],\ 1 \le p < \infty$	không gian các hàm khả tích bậc p trên đoạn $[a,b]$
$d(x,C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
$\limsup_{n\to\infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$\liminf_{n\to\infty} x_n$	giới hạn dưới của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \to x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
c	không gian các dãy số hội tụ

Mở đầu

Bài toán bất đẳng thức biến phân trong không gian vô hạn chiều đã được nhà toán học người Italia là G. Stampacchia và các đồng sự đưa ra đầu tiên vào năm 1960 (xem [16]) trong khi nghiên cứu các bài toán biên tự do. Từ đó các phương pháp bất đẳng thức biến phân vô hạn chiều đã được sử dụng rộng rãi và hiệu quả trong các phương trình vật lý toán. Bất đẳng thức biến phân có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực kinh tế, kỹ thuật, vận trù học v.v.... Vì vai trò quan trọng của bất đẳng thức biến phân trong lý thuyết toán học cũng như trong ứng dụng thực tế nên nó luôn là một đề tài thời sự, được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Bất đẳng thức biến phân loại đơn điệu, nói chung, thuộc lớp bài toán đặt không chỉnh theo nghĩa Hadamard, nghĩa là bài toán (khi dữ kiện thay đổi nhỏ) hoặc không tồn tại nghiệm, hoặc nghiệm không duy nhất hoặc nghiệm không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu. Những người có công đặt nền móng cho lý thuyết bài toán đặt không chỉnh là các nhà toán học A.N. Tikhonov (1963) [14], M.M. Lavrentiev (1967) [11] và V.K. Ivanov (1978) [10] v.v.... Do tính không ổn định của bài toán đặt không chỉnh nên việc giải số của nó gặp nhiều khó khăn. Lý do là một sai số nhỏ trong dữ kiện của bài toán có thể dẫn đến sai số bất kỳ trong lời giải. Để giải loại bài toán này ta phải sử dụng các phương pháp giải ổn định sao cho khi sai số của dữ kiện càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán ban đầu. Một trong những phương pháp được sử dụng rộng rãi và khá hiệu quả đó là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Kể từ năm 1963 khi A.N. Tikhonov [14] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng, gọi là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, thì lý thuyết bài toán đặt không chỉnh được phát triển hết sức sôi động và có mặt ở hầu hết các bài toán thực tế.

Trên cơ sở ý tưởng hiệu chỉnh của A.N. Tikhonov, F. Browder, Ya.I. Alber, I.P. Ryazansteva, O.A. Liskovets v.v… đã phát triển các phương pháp hiệu chỉnh mới cho lớp bài toán bất đẳng thức biến phân loại đơn điệu từ không gian Hilbert sang không gian Banach, từ bài toán tuyến tính sang bài toán phi tuyến, từ bài toán đơn trị sang bài toán đa trị v.v…. (xem [4], [8], [12] và các tài liệu được trích dẫn trong đó).

Đề tài luận văn trình bày hai phương pháp hiệu chỉnh giải bất đẳng thức biến phân trên tập ràng buộc là tập điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Banach trong bài báo [13] của Nguyễn Thị Thu Thủy và các đồng tác giả công bố năm 2017.

Nội dung của đề tài được trình bày trong hai chương. Chương 1 với tiêu đề "Nửa nhóm không giãn và bất đẳng thức biến phân", trình bày một số khái niệm và tính chất của không gian Banach, ánh xạ không giãn, nửa nhóm ánh xạ không giãn và bài toán bất đẳng thức biến phân j-đơn điệu. Chương 2 với tiêu đề "Hiệu chỉnh bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của nửa nhóm không giãn", trình bày hai phương pháp hiệu chỉnh giải bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của nửa nhóm ánh xạ không giãn, trình bày các định lý hội tụ mạnh của hai phương pháp cùng hai ví dụ minh họa.

Luận văn được hoàn thành tại Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình học tập và thực hiện luận văn này, Trường Đại học Khoa học đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tác giả học tập, nghiên cứu. Tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến các thầy, cô trong khoa Toán - Tin, trong Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Đặc biệt, tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - Người đã tận tình hướng dẫn tác giả hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn tới Ban giám hiệu trường THPT Ân Thi, Hưng Yên và tập thể các thầy cô giáo trong tổ Toán Tin của Trường đã tạo điều kiện giúp đỡ tác giả trong thời gian tác giả tham gia học cao học.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Tác giả luận văn

Phạm Trung Hảo

Chương 1

Nửa nhóm không giãn và bất đẳng thức biến phân

Chương này trình bày một số khái niệm và tính chất của không gian Banach; ánh xạ j-đơn điệu, ánh không giãn, nửa nhóm ánh xạ không giãn, giới hạn Banach, bất đẳng thức biến phân và một số bài toán liên quan đến bất đẳng thức biến phân. Các kiến thức của chương này được tham khảo từ các tài liệu [1], [2], [3] và các tài liệu được trích dẫn trong đó.

1.1 Nửa nhóm không giãn

Mục này trình bày các định nghĩa, ví dụ về không gian Banach lồi đều có chuẩn khả vi Gâteaux đều; định nghĩa, ví dụ về ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của không gian Banach, tính chất của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc; định nghĩa, ví dụ về ánh xạ j-đơn điệu, nửa nhóm ánh xạ không giãn trong không gian Banach; định nghĩa giới hạn Banach và tính chất.

1.1.1 Không gian Banach lồi đều

Cho X là một không gian Banach thực, X^* là không gian đối ngẫu của X và $\langle x, x^* \rangle$ là ký hiệu giá trị của $x^* \in X^*$ tại $x \in X$. Ký hiệu 2^X là một họ các tập con khác rỗng của X. Ký hiệu $S_X := \{x \in X : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của không gian Banach X.

Định nghĩa 1.1.1 Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_X$, $x \neq y$ ta có

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \text{với mọi} \quad \lambda \in (0,1).$$

Chú ý 1.1.2 Định nghĩa 1.1.1 có thể được phát biểu dưới dạng tương đương: Không gian Banach X được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_X$, $x \neq y$ thì

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Ví dụ 1.1.3 Không gian Hilbert H là một không gian lồi chặt. Thật vậy, từ đẳng thức hình bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,\big),$$

suy ra với mọi $x, y \in S_H$, $x \neq y$ ta có

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 = 1 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 < 1.$$

Định nghĩa 1.1.4 Không gian Banach X được gọi là một không gian lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$, với mọi $x, y \in X$ thỏa mãn $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$, $\|x-y\| \geq \varepsilon$, tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta.$$

Ví dụ 1.1.5 Không gian Hilbert H là một không gian lồi đều. Thật vậy, từ đẳng thức hình bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\,\|x\|^2 + \|y\|^2\,\big),$$

với $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1$, $x \neq y$ và $\|x-y\| \geq \varepsilon$ ta có

$$\|x+y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2.$$

Từ đây suy ra

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon),$$

với $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2/4}$.